

ĐỀ THI ĐỀ XUẤT

(Đề thi có 04 trang)

TỔNG QUAN ĐỀ THI

	Tiêu đề	File nộp	File dữ liệu	File kết quả	Thời gian	Bộ nhớ
Bài 1	Dãy LCMGCD	LCMGCD.*	LCMGCD.INP	LCMGCD.OUT	1 giây	1024 MB
Bài 2	Đặt quân cờ	CHESS.*	CHESS.INP	CHESS.OUT	1 giây	1024 MB
Bài 3	Di sản	HERIT.*	HERIT.INP	HERIT.OUT	1 giây	1024 MB

- Dấu * được thay thế bởi PAS hoặc CPP hoặc PY tương ứng với ngôn ngữ lập trình Pascal hoặc C++ hoặc Python.
- Mỗi bài bao gồm nhiều subtask, mỗi subtask bao gồm nhiều test đơn, điểm của thí sinh được tính theo từng test đơn.
- Thí sinh không được phép sử dụng các định hướng biên dịch chương trình có các từ khoá sau: pragma, optimize, target, O3, Ofast, unroll-loops, avx, avx2, fma, omit-frame-pointer.
- Bài của thí sinh sẽ được chấm điểm trên máy chấm có CPU tương đương với Intel Core i9-13900K 3.20 GHz. Thí sinh sử dụng thông tin máy chấm để tham khảo và đánh giá thời gian chạy đáp ứng yêu cầu đề bài.

Hãy lập trình giải các bài toán sau:

Bài 1. Dãy LCMGCD (7,0 điểm)

Cho số nguyên dương n và dãy số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_n$. Với mỗi cặp chỉ số (i, j) thỏa mãn $1 \leq i \leq j \leq n$, ta thực hiện phép biến đổi sau:

- Thay đoạn con liên tiếp $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$ bằng một số duy nhất có giá trị $\text{lcm}(a_i, a_{i+1}, \dots, a_j)$, trong đó lcm là bội chung nhỏ nhất.
- Khi đó, dãy thu được gồm các phần tử $a_1, \dots, a_{i-1}, \text{lcm}(a_i, \dots, a_j), a_{j+1}, \dots, a_n$.

Giá trị của dãy sau phép biến đổi được định nghĩa là:

$$f(i, j) = \gcd(a_1, \dots, a_{i-1}, \text{lcm}(a_i, \dots, a_j), a_{j+1}, \dots, a_n),$$

trong đó gcd là ước chung lớn nhất.

Yêu cầu: Tính tổng $S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n f(i, j)$.

Dữ liệu

Vào từ file văn bản **LCMGCD.INP**:

- Dòng đầu chứa số nguyên n ($1 \leq n \leq 2 \cdot 10^5$).
- Dòng thứ hai chứa n số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($1 \leq a_i \leq 10^7$).

Các số trên cùng một dòng cách nhau bởi dấu cách.

Kết quả

Ghi ra file văn bản **LCMGCD.OUT**:

- Một số nguyên duy nhất là giá trị S , lấy theo modulo 998244353.

Ví dụ

LCMGCD.INP	LCMGCD.OUT
5 2 6 9 3 6	44
6 1 2 3 4 5 6	85

Chấm điểm

- Subtask 1** (30% số điểm): $n \leq 200$.
- Subtask 2** (30% số điểm): $n \leq 2000$.
- Subtask 3** (40% số điểm): Không có ràng buộc nào thêm.

Bài 2. Đặt quân cờ (7,0 điểm)

Cho một bàn cờ hình vuông kích thước $m \times m$. Các hàng và cột của bàn cờ được đánh số từ 1 đến m .

Bạn đặt các quân cờ lên bàn cờ sao cho mỗi ô có không quá một quân cờ. Đồng thời, phải thỏa mãn n điều kiện ràng buộc. Điều kiện thứ i của bài toán gồm hai số nguyên r_i và c_i , có nghĩa là trong hình chữ nhật bao gồm các ô có tọa độ $[1 \dots r_i] \times [1 \dots c_i]$ có không quá một quân cờ.

Yêu cầu: Hãy xác định số cách sắp xếp các quân cờ khác nhau thỏa mãn tất cả các ràng buộc, lấy theo modulo $10^9 + 7$.

Dữ liệu

Vào từ file văn bản **CHESS.INP**:

- Dòng đầu tiên của dữ liệu đầu vào chứa các số nguyên n và m , theo thứ tự là số lượng điều kiện hạn chế và kích thước bàn cờ ($1 \leq n \leq 2 \cdot 10^5, 1 \leq m \leq 10^9$).
- Tiếp theo là n dòng, mỗi dòng chứa hai số nguyên r_i và c_i ($1 \leq r_i, c_i \leq m$).

Kết quả

Ghi ra file văn bản **CHESS.OUT**:

- Ghi ra một số nguyên duy nhất là số cách thỏa mãn yêu cầu bài toán, theo modulo $10^9 + 7$.

Ví dụ

CHESS.INP	CHESS.OUT
1 4 4 4	17
2 2 1 2 2 1	10
3 5 2 5 3 4 4 4	4480

Giải thích

Trong ví dụ đầu tiên, trên toàn bộ bàn cờ chỉ có thể đặt không quá một quân cờ. Có $4 \times 4 = 16$ cách để đặt một quân cờ và 1 cách không đặt quân cờ nào. Suy ra có tổng cộng 17 cách.

Chấm điểm

- **Subtask 1** (20% số điểm): $n \leq 10$; $m \leq 4$.
- **Subtask 2** (20% số điểm): $n = 1$; $m \leq 1000$.
- **Subtask 3** (20% số điểm): $n \leq 10$; $m \leq 1000$.
- **Subtask 4** (20% số điểm): $n \leq 5$; $m \leq 10^9$.
- **Subtask 5** (20% số điểm): Không có ràng buộc nào thêm.

Bài 3. Di sản (6,0 điểm)

Vương quốc Anpha có N địa điểm tham quan được đánh số từ 1 đến N , chúng kết nối với nhau bởi $N - 1$ con đường hai chiều, giữa hai địa điểm tham quan khác nhau có không quá một con đường nối giữa chúng và không có con đường nào nối một địa điểm với chính nó. Mỗi địa điểm i có một giá trị di sản văn hóa là V_i .

Một đoàn du khách muốn thực hiện các chuyến hành trình khám phá. Tuy nhiên, họ có một quy tắc tham quan rất khắt khe: Trong một chuyến đi từ địa điểm u đến địa điểm v , họ chỉ dừng lại tham quan một địa điểm nếu giá trị di sản của nó không nhỏ hơn giá trị di sản của tất cả các địa điểm mà họ đã thực sự dừng lại tham quan trước đó trong cùng chuyến đi.

Yêu cầu:

Có Q sự kiện xảy ra thuộc một trong hai loại:

1. Cập nhật: $1\ u\ new_V$ - Giá trị di sản của địa điểm u thay đổi thành new_V .
2. Truy vấn: $2\ u\ v$ - Cho biết số lượng địa điểm tối đa mà đoàn du khách sẽ dừng lại tham quan khi đi từ u đến v .

Dữ liệu

Vào từ file văn bản HERIT.INP:

- Dòng đầu tiên gồm hai số nguyên N và Q ($1 \leq N, Q \leq 10^5$).
- Dòng thứ hai gồm N số nguyên $V_1, V_2, \dots, V_N$ ($1 \leq V_i \leq 10^9$).
- $N - 1$ dòng tiếp theo, mỗi dòng gồm hai số nguyên x, y ($1 \leq x, y \leq N$) mô tả một con đường nối giữa địa điểm x và y .
- Q dòng cuối cùng, mỗi dòng mô tả một sự kiện theo định dạng đã nêu.

Các số trên cùng một dòng cách nhau bởi dấu cách.

Kết quả

Ghi ra file văn bản HERIT.OUT:

- Với mỗi truy vấn loại 2, in ra một số nguyên duy nhất là số lượng địa điểm tham quan được.

Ví dụ

HERIT.INP	HERIT.OUT
5 3	3
1 1 2 4 5	2
1 2	
2 3	
2 4	
4 5	
2 3 5	

1 2 10	
2 3 5	

Chấm điểm

- **Subtask 1** (15% số điểm): $N, Q \leq 1000$.
- **Subtask 2** (20% số điểm): $N, Q \leq 10^4$; Địa điểm i nối với $i + 1$, $1 \leq i \leq N - 1$, và không có truy vấn cập nhật loại 1.
- **Subtask 3** (25% số điểm): $N, Q \leq 10^5$; Giá trị di sản V_i không thay đổi (không có truy vấn cập nhật loại 1).
- **Subtask 4** (40% số điểm): Không có ràng buộc nào thêm.

----- HẾT -----

- Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu;
- Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.