

## Tổng quan về đề thi

#	Tên bài	Chương trình	Dữ liệu	Kết quả	Thời gian	Điểm
1	Hợp nhất	UNITE21.*	UNITE21.inp	UNITE21.out	1s/test	7
2	Bảo trì đường cao tốc	HWMaint.*	HWMaint.inp	HWMaint.out	1s/test	7
3	Kết quả biểu thức	BRACKINS.*	BRACKINS.inp	BRACKINS.out	1s/test	6

### Lưu ý:

- Thí sinh thay \* trong tên chương trình thành **PY**, **PAS** hoặc **CPP** tùy theo ngôn ngữ lập trình mà thí sinh sử dụng là **Python**, **Pascal** hoặc **C/C++**.

### Lập chương trình giải các bài toán sau:

## Bài 1. Hợp nhất [UNITE21]

Cho một dãy số nguyên dương gồm  $N$  phần tử. Tại mỗi bước, tạo ra một dãy mới bằng cách cộng từng cặp phần tử liên tiếp trong dãy hiện tại:

- Phần tử thứ nhất của dãy mới là tổng của phần tử thứ nhất và thứ hai của dãy cũ,
- Phần tử thứ hai là tổng của phần tử thứ hai và thứ ba của dãy cũ,
- ....,
- Phần tử cuối cùng là tổng của hai phần tử cuối cùng của dãy cũ.

Lặp lại quá trình này cho đến khi chỉ còn một số duy nhất.

Hãy tính giá trị của số cuối cùng này, lấy theo modulo  $(10^9 + 7)$ .

### Dữ liệu

- Dòng 1: số nguyên  $N$  ( $1 \leq N \leq 5 \cdot 10^5$ ) – số phần tử ban đầu của dãy.
- Dòng 2:  $N$  số nguyên  $a_1, a_2, \dots, a_N$  ( $1 \leq a_i \leq 10^5$ ) – các phần tử của dãy ban đầu.

### Kết quả

- Dòng 1: số nguyên kết quả, lấy modulo  $(10^9 + 7)$ .

### Subtasks

#	Điểm	Ràng buộc bổ sung
1	30	$1 \leq N \leq 1000$
2	15	Mọi phần tử $a_i$ đều bằng nhau
3	40	$N \leq 100000$
4	15	Không có ràng buộc bổ sung

## Ví dụ

Input	Output	Giải thích ví dụ
5 3 5 4 6 2	73	$[3,5,4,6,2] \rightarrow [8,9,10,8] \rightarrow [17,19,18] \rightarrow [36,37] \rightarrow [73]$

## Bài 2. Bảo trì đường cao tốc [HWMaint]

Năm 2xxx, hệ thống đường sá của đất nước ZZZ chỉ bao gồm các con đường thường và đường cao tốc, hệ thống này đảm bảo giao thông giữa hai thành phố bất kì trong các thành phố của ZZZ.

Cụ thể, đất nước ZZZ có  $N$  thành phố và  $M$  con đường nối chúng. Mỗi con đường là đường thường hoặc đường cao tốc. Có  $K$  công ty (đánh số 1 ...  $K$ ) có thể nhận nhiệm vụ bảo trì đường cao tốc. Mỗi đường cao tốc phải được giao cho đúng một công ty.

Hãy tìm một phương án phân công các đường cao tốc cho các công ty sao cho mọi đường đi từ thành phố 1 đến thành phố  $N$ , phải đi qua ít nhất một đường cao tốc của mỗi công ty.

### Dữ liệu

- Dòng đầu gồm ba số nguyên  $N, M, K$  ( $2 \leq N \leq 10^5; 1 \leq M \leq 2 \cdot 10^5; 1 \leq K \leq M$ ) – số thành phố, số con đường và số công ty.
- $M$  dòng tiếp theo, mỗi dòng gồm ba số nguyên  $u, v, w$  mô tả một con đường nối hai thành phố  $u, v$  ( $1 \leq u, v \leq N, u \neq v$ ),  $w = 1/0$  ứng với con đường này là đường cao tốc/đường thường.  
Dữ liệu đảm bảo có đường đi giữa hai thành phố bất kì.

### Kết quả

- Nếu không có phương án phân công, ghi ra trên một dòng duy nhất xâu “No”
- Ngược lại
  - Dòng 1: xâu “Yes”
  - Dòng 2 ...  $T + 1$ : dòng  $i + 1$  ghi số nguyên là chỉ số của công ty được giao nhiệm vụ bảo trì đường cao tốc thứ  $i$  (giả thiết có  $T$  đường cao tốc, chúng được đánh số 1 ...  $T$  theo thứ tự xuất hiện trong dữ liệu nhập).

Nếu có nhiều nghiệm thì chỉ cần đưa ra nghiệm bất kỳ.

### Subtasks

#	Điểm	Ràng buộc bổ sung
1	6%	$K=1$
2	12%	$N \leq 1000, M \leq 3000$ ; số đường cao tốc $\leq 8$
3	15%	$K=2$
4	30%	Tất cả các cạnh đều là đường cao tốc
5	37%	Không có ràng buộc bổ sung

## Ví dụ

Input	Output	Giải thích ví dụ
6 6 3 1 4 1 1 5 1 2 4 1 3 6 1 2 3 0 4 5 0	Yes 1 1 2 3	

## Bài 3. Kết quả biểu thức [BRACKINS]

Cho một biểu thức số học gồm  $n$  toán hạng liên kết bởi  $n - 1$  phép toán xen kẽ giữa chúng. Mỗi toán hạng là số nguyên dương không vượt quá  $S$ . Có  $k$  loại phép toán, được đánh số từ 1 đến  $k$ . Phép toán  $i$  (kí hiệu  $(op)_i$ ) có độ ưu tiên  $p_i$  ( $1 \leq p_i \leq k$ ). Nếu các phép toán có độ ưu tiên khác nhau, thì phép toán có độ ưu tiên cao hơn sẽ được thực hiện trước. Nếu tất cả các phép toán có cùng độ ưu tiên, chúng được thực hiện từ trái sang phải. Trong biểu thức có dấu ngoặc, các phép toán trong ngoặc được thực hiện trước.

Mỗi phép toán được định nghĩa bởi một danh sách các bộ ba  $(x, y, z)$ , nghĩa là nếu áp dụng phép toán  $i$  với toán hạng trái là  $x$  và toán hạng phải là  $y$ , ta nhận được kết quả  $z$  (kí hiệu:  $x (op)_i y = z$ ). Lưu ý rằng  $x (op)_i y = z$  không đảm bảo  $y (op)_i x = z$ , nghĩa là các phép toán không nhất thiết có tính chất giao hoán. Với mỗi cặp  $(x, y)$  chỉ có tối đa một kết quả. Nếu tại một bước tính  $x (op) y$ , phép toán  $(op)$  không có định nghĩa cho cặp  $(x, y)$ , thì biểu thức trở nên vô nghĩa.

**Yêu cầu:** Tìm số lượng dấu cặp ngoặc tối thiểu cần đặt vào biểu thức để giá trị biểu thức bằng mỗi giá trị từ 1 đến  $S$ . Nếu không thể đạt được một giá trị nào đó, in ra  $-1$ .

### Dữ liệu

- Dòng 1: ba số nguyên  $n, k, S$  ( $1 \leq n, k, S \leq 100$ ).
- Dòng 2:  $n$  số nguyên  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $1 \leq a_i \leq S$ ).
- Dòng 3:  $n - 1$  số nguyên  $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$  ( $1 \leq b_i \leq k$ ),  $b_i$  là phép toán giữa  $a_i$  và  $a_{i+1}$ .
- Tiếp theo là  $k$  nhóm dòng mô tả các phép toán, nhóm dòng  $i$  gồm
  - Dòng đầu tiên chứa hai số nguyên  $t_i, p_i$ ,  $t_i$  là số bộ ba định nghĩa phép toán  $(op)_i$
  - Sau đó là  $t_i$  dòng, mỗi dòng gồm ba số nguyên  $x, y, z$  ( $1 \leq x, y, z \leq S$ ) mô tả  $x (op)_i y = z$ .

Tổng số bộ ba định nghĩa của tất cả phép toán không vượt quá 200.

## Kết quả

- Dòng 1:  $S$  số nguyên, số thứ  $i$  ( $1 \leq i \leq S$ ) là số dấu ngoặc tối thiểu cần thêm để biểu thức có giá trị bằng  $i$ , nếu không tồn tại biểu thức cho kết quả bằng  $i$  thì số này bằng  $-1$ .

## Subtasks

#	Điểm	Ràng buộc bổ sung
1	10%	Kết quả cho mỗi giá trị là 0 hoặc -1
2	10%	$k = 1$ , kết quả mỗi giá trị là 0, 1 hoặc -1
3	20%	$k = 1$
4	60%	Không có ràng buộc bổ sung

## Ví dụ

Input	Output	Giải thích
6 1 4 4 1 3 2 1 4 1 1 1 1 1 7 1 4 2 1 3 3 4 3 2 4 1 4 3 4 1 3 1 3 2 3 4 4	-1 1 2 1	<p>Ký hiệu <math>\oplus</math> là phép toán có 7 quy tắc tính: <math>4 \oplus 2 = 1; 3 \oplus 3 = 4; 3 \oplus 2 = 4; 1 \oplus 4 = 3; 4 \oplus 1 = 3; 1 \oplus 3 = 2; 3 \oplus 4 = 4</math></p> <p>Dãy toán hạng (4,1,3,2,1,4) không thể tạo được kết quả bằng 1.</p> <p>Các kết quả 2,3,4 đạt được bằng các biểu thức</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>4 \oplus 1 \oplus 3 \oplus 2 \oplus (1 \oplus 4) = 4 \oplus 1 \oplus 3 \oplus 2 \oplus 3 = 3 \oplus 3 \oplus 2 \oplus 3 = 4 \oplus 2 \oplus 3 = 1 \oplus 3 = 2</math></li> <li><math>4 \oplus (1 \oplus (3 \oplus 2 \oplus 1)) \oplus 4 = 4 \oplus (1 \oplus (4 \oplus 1)) \oplus 4 = 4 \oplus (1 \oplus 3) \oplus 4 = 4 \oplus 2 \oplus 4 = 1 \oplus 4 = 3</math></li> <li><math>4 \oplus 1 \oplus (3 \oplus 2) \oplus 1 \oplus 4 = 4 \oplus 1 \oplus 4 \oplus 1 \oplus 4 = 3 \oplus 4 \oplus 1 \oplus 4 = 4 \oplus 1 \oplus 4 = 3 \oplus 4 = 4</math></li> </ul>

----- Hết -----